

Τελική Εξέταση-Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 26/9/2022

Διδάσκοντες: Ελευθέριος Νικολιδάκης, Χρήστος Σαρόγλου

Θέμα 1ο.

i) [1.5 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-5}}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

ii) [1.5 μον.] Να βρεθούν όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n4^n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2ο. [2 μον.] Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = x^{1/4}, \quad x \in [0, \infty).$$

Θέμα 3ο. [1.5 μον.] Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ μία συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 e^{f(t)} dt = 1$. Να δειχθεί ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Θέμα 4ο. [2 μον.] Να δειχθεί ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θέμα 5ο.

i) [1.5 μον.] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)^2} dx, \quad \int \cos^2 x \sin^3 x dx.$$

ii) [1 μον.] Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

Καλή επιτυχία!